## 2. Nội dung, phương pháp và giải pháp thực hiện

*2.1. Nội dung, phương pháp*

*2.1.1. Cơ sở lý thuyết*

*a) Khái niệm hàm số hợp và công thức tính đạo hàm của hàm số hợp*

Giả sử $u = g(x)$ là hàm số của $x$, xác định trên khoảng $(a;b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c;d)$; $y = f(u)$ là hàm số của $u$, xác định trên $(c;d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên $(a;b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau: $x \to f(g(x))$.

Ta gọi hàm $x \to f(g(x))$ là hàm số hợp của hàm $y = f(u)$ với $u = g(x)$

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại $x$ là $u'_x$ và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại $u$ là $y'_u$ thì hàm số hợp $y = f(g(u))$ có đạo hàm tại $x$ là $y'_x = y'_u.u'_x$.

*b) Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu*

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $K$.

- Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $K$.

- Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $K$.

- Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng $K$.

Mở rộng:

- Nếu $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $K$.

- Nếu $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $K$.

*c) Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị*

**Định lý 1:**

Giả sử hàm số $f$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm $x_0$ và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số $f$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0$.

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số $f$ đạt cực đại tại điểm $x_0$.

**Định lý 2:**

Giả sử hàm số $f$ có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm $x_0$, $f'(x_0)=0$ và $f$ có đạo hàm cấp hai khác $0$ tại điểm $x_0$.

- Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số $f$ đạt cực đại tại điểm $x_0$.

- Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số $f$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0$.

*d) Một số kết quả mở rộng*

- Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đều đồng biến trên K thì hàm số $y=f(x)+g(x)$ cũng đồng biến trên K.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đều nghịch biến trên K thì hàm số $y=f(x)+g(x)$ cũng nghịch biến trên K.

- Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$:

+ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ gấp đôi số điểm cực trị có hoành độ dương của hàm số $y=f(x)$ cộng thêm 1.

+ Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x)=0$.

*e) Phương pháp ghép bảng biến thiên giải một số bài toán liên quan đến hàm số hợp*

Để giải quyết bài toán liên quan đến hàm số hợp $g(x) = f\left(u\left(x\right)\right)$. Ta thực hiện theo các bước sau đây:

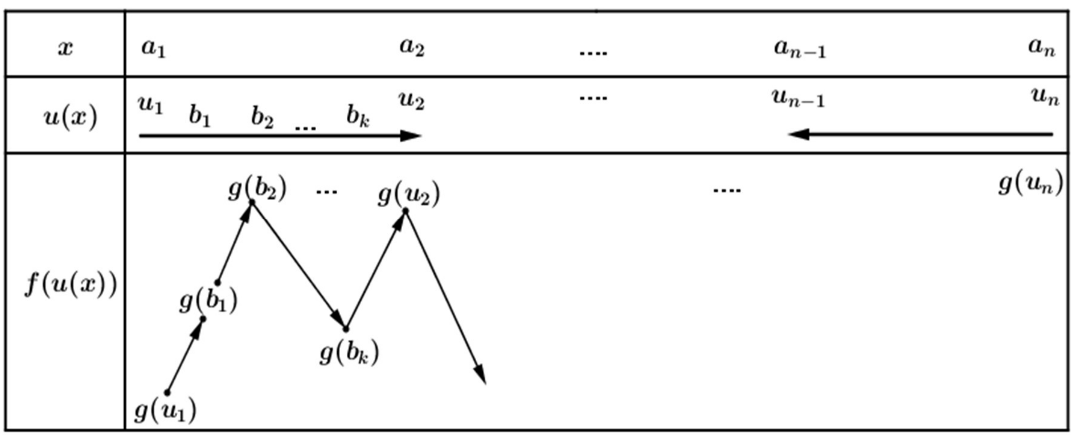
**Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm $g(x) = f\left(u\left(x\right)\right)$**.** Giả sử tập xác định tìm được như sau:

$D = \left(a_1; a_2\right) \cup \left(a_3; a_4\right) \cup .... \cup \left(a_{n-1}; a_n\right)$, ( có thể $a_1$ là $-\infty$; $a_n$ là $+\infty$)

**Bước 2:** Xét sự biến thiên của hàm $u = u\left(x\right)$ và hàm $y = f\left(x\right)$.

Lập bảng biến thiên kép, xét sự tương quan giữa $\left[x; u = u\left(x\right)\right]$ và $\left[u; g = f\left(u\right)\right]$

*(Bảng biến thiên này thường có 3 dòng)*




**Dòng 1:** Xác định các điểm đặc biệt của hàm $u = u\left(x\right)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải, giải sử như sau:
$a_1 < a_2 < .... < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý số 1).

**Dòng 2:** Điền các giá trị $u_i = u\left(a_i\right)$, với $\left(i = \overline{1,.....,n}\right)$.

- Trên mỗi khoảng $\left(u_i; u_{i+1}\right)$, với $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ cần bổ sung các điểm đặc biệt $b_1, b_2, ....b_k$ của hàm số $y = f\left(x\right)$.

- Trên mỗi khoảng $\left(u_i; u_{i+1}\right)$, với $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự, chẳng hạn: $u_i < b_1 < b_2 < .... < b_k < u_{i+1}$ hoặc $u_i > b_1 > b_2 > .... > b_k > u_{i+1}$ (xem chú ý số 2).

**Dòng 3:** Xét chiều biến thiên của hàm số $g(x)=f(u(x))$ dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ bằng cách hoán đổi $u$ đóng vai trò của $x$; $f\left(u\right)$ đóng vai trò của $f\left(x\right)$. Sau khi hoàn thiện bảng biến thiên $g(x)=f\left(u\left(x\right)\right)$ ta sẽ thấy được hình dạng của đồ thị hàm số này.

**Bước 3:** Dùng bảng biến thiên của hàm số hợp $g(x)=f\left(u\left(x\right)\right)$ để giải quyết các yêu cầu của bài toán và đưa ra kết luận.

**Một số chú ý quan trọng khi sử dụng phương pháp ghép bảng biến thiên để giải quyết các bài toán về hàm hợp:**

**Chú ý 1:**

* Các điểm đặc biệt của $u=u\left(x\right)$ gồm: các điểm biên của tập xác định $D$, các điểm cực trị của hàm số $u=u\left(x\right)$.

* Nếu xét hàm $u=\left|u\left(x\right)\right|$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $u\left(x\right)=0$. ( là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $u=u\left(x\right)$ với trục $Ox$ ).

* Nếu xét hàm $u=u\left(|x|\right)$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có số $0$ (là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $u=u\left(x\right)$ và trục $Oy$ ).

**Chú ý 2:**

* Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u=u\left(x\right)$.

* Điểm đặc biệt của hàm số $y=f\left(x\right)$ gồm: các điểm tại đó $f\left(x\right)$ và $f'\left(x\right)$ không xác định, các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$.

* Nếu xét hàm $g=\left|f\left(u\left(x\right)\right)\right|$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$.

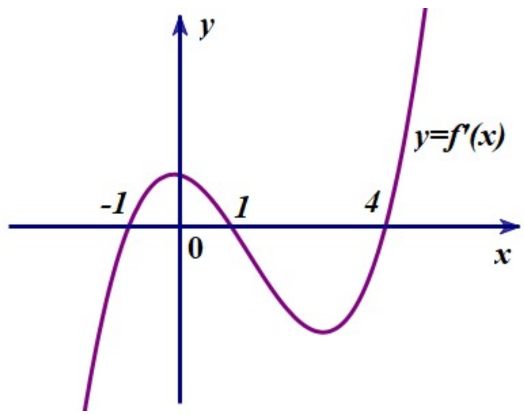
* Nếu xét hàm $g(x)=f\left(u\left(|x|\right)\right)$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có số $0$.

Trong các bài toán có thể sử dụng phương pháp ghép bảng biến thiên, đề bài sẽ cho chúng ta thông tin về đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm hợp $f\left(u(x)\right)$ khi đã biết thông tin từ hàm số $f(x)$ và $u(x)$. Từ đó ta hình thành sơ đồ tư duy bắt buộc như sau: $x \to u(x) \to f\left(u(x)\right)$.

*2.1.2. Áp dụng vào bài toán thường gặp*

**Dạng 1: Xét tính đơn điệu của hàm số hợp**

**Ví dụ 1**. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Xét sự đơn điệu của hàm số $y = f(x) + 3$.




**Lời giải**

Ta có $y' = f'(x)$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{array}\right..$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số $y = f(x) + 3$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;4)$.

**Ví dụ 2**. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(1-x)$.

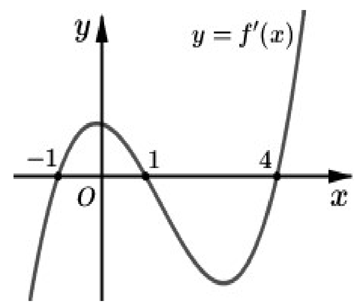
**Lời giải**

Ta có: $y = f(1-x) \Rightarrow y' = -f'(1-x)$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x > 1 \\ -1 < 1-x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số $y = f(1-x)$ có nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;2)$

**Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?




**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;-1)$.

**C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;2)$.

**Lời giải**

**Cách 1.** Ta có $g'(x) = 2xf(x^2)$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x^2 < 1 \ \vee \ x^2 > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < -1 \ \vee \ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \ \vee \ x > 2 \\ -2 < x < -1 \end{array}\right..$$

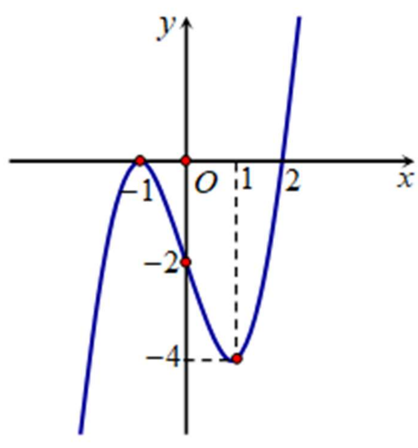
**Cách 2.** Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-1 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn đáp án B.

**Ví dụ 4.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét tính đơn điệu của hàm số $g(x)=f(x^2-2)$.




**Lời giải**

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>2$

Xét $g(x)=f(x^2-2)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

$g'(x)=2x.f'(x^2-2)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

$$f'(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x^2-2>2 \Leftrightarrow |x|>2.$$

Do đó, ta có bảng xét dấu $g'(x)$

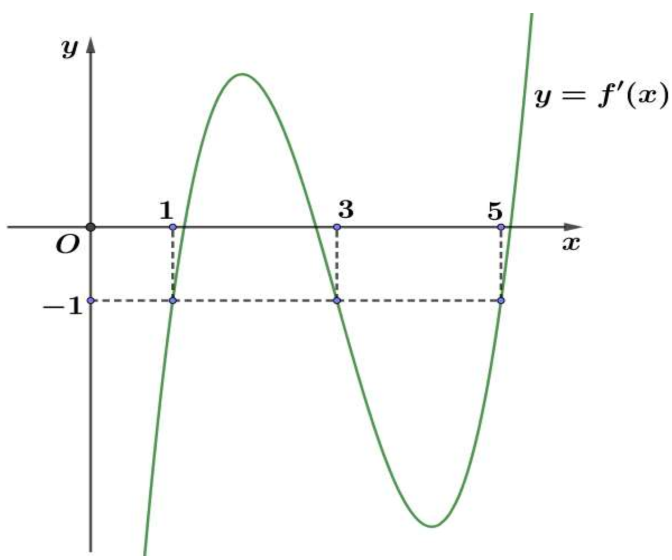
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $f'(x^2-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu suy ra:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

**Ví dụ 5.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:




Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x)=f(x)+x+1$.

**Lời giải**

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra:

$$f'(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 3 \\ x > 5 \end{array}\right..$$

$$f'(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow f'(x) < -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ 3 < x < 5 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số $g(x) = f(x) + x + 1$ đồng biến trên các khoảng $(1;3)$ và $(5;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;5)$.

**Ví dụ 6**. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hỏi hàm số $y = f^3(x) - 3f^2(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có $h'(x) = 3f'(x)\left[f^2(x) - 2f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right., \quad f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\,(0<a<1) \\ x=4 \end{array}\right.;$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=b\,(a<b<1) \\ x=c\,(1<c<2) \\ x=3 \\ x=d\quad (d>4) \end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | | $a$ | | $b$ | | $1$ | | $c$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $d$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu, ta thấy được $h'(x)<0, \forall x \in (2;3)$ nên $h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

**Cách 2:** Đặt $u=f(x) \Rightarrow g(u)=u^3-3u^2$

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2$ có bảng biến thiên như sau:

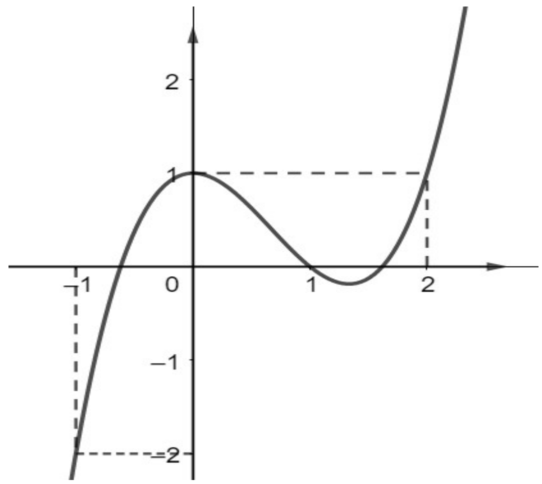
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Sử dụng phương pháp ghép bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u=f(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $3$ | $2$ | $1$ | | $2$ | | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $g(u)$ | $-\infty$ | $0$ | $-4$ | $g(3)$ | $-4$ | $g(1)$ | | $-4$ | | $0$ | $-4$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

**Ví dụ 7**. Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$, biết $f(1)=-\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



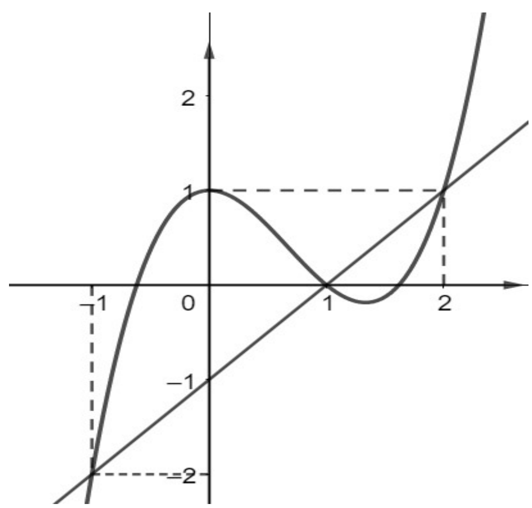

Hàm số $g(x)=\left|2f(x)-x^2+2x\right|$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Lời giải**

Xét $h(x)=2f(x)-x^2+2x\Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2x+2$

Ta có: $h'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)-2x+2=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$




Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ là $x=-1;x=1;x=2$

Do đó phương trình $f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| $h(x)$ | | $\searrow$ | $h(-1)$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | $h(2)$ | $\nearrow$ | |

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$

| $x$ | $-\infty$ | | | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | | - | | 0 | + | 0 | - | 0 | | + | | |
| $h(x)$ | | | $\searrow$ | | $h(-1)$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | $h(2)$ | | $\nearrow$ | | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $g(x)=|2f(x)-x^2+2x|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

**Ví dụ 8.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

**<u>A.</u>** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 13 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m< -1 \\ m\ge 13 \end{array}\right.$. **C.** $-1\le m\le 13$. **D.** $m\ge 13$.

**Lời giải**

Ta có $y'=f'(x^2+3x-m)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$.

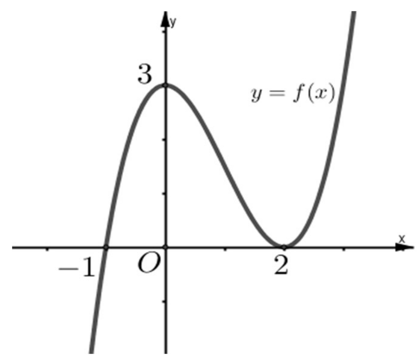
Vì $2x+3>0, \forall x \in (0;2)$ nên

$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{array}\right. \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{array}\right. \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$.

**Ví dụ 9**. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.




Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=f(\cos x+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** $m \leq 1$. **B.** $m<1$. **C.** $m>1$. **<u>D</u>.** $m \geq 1$.

**Lời giải**

Ta có $y'=(-\sin x+2).f'(\cos x+2x+m)$.

Hàm số $y=f(\cos x+2x+m)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, suy ra:

Hàm số $y=f(\cos x+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $(-\sin x+2).f'(\cos x+2x+m) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$ (1)

Do $-\sin x+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow f'(\cos x+2x+m)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\,(2)$

Dựa vào đồ thị ta có

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+2x+m\ge 2,\ \forall x\in(0;+\infty)\\ \cos x+2x+m\le 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x+2x\ge 2-m,\ \forall x\in(0;+\infty) & (3a)\\ \cos x+2x\le -m,\ \forall x\in(0;+\infty) & (3b)\end{array}\right..$$

Xét hàm $g(x)=\cos x+2x$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có $g'(x)=-\sin x+2>0,$ $\forall x\in(0;+\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ đồng thời $g(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{[0;+\infty)} g(x)=g(0)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Do đó, không có giá trị $m$ thỏa $(3b)$;

$(3a)\Leftrightarrow 1\ge 2-m\Leftrightarrow m\ge 1$. Vậy $m\ge 1$.

**Ví dụ 10**. Cho hàm số $f(x)=x^4+x^2+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $g(x)=f\left(2|x+m|+m^2+1\right)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $4$. **D.** $6$.

**Lời giải**

Ta có: $f(x)=x^4+x^2+2\Rightarrow f'(x)=4x^3+2x$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Đặt $u=2|x+m|+m^2+1$, hàm số $u(x)$ có một điểm cực trị là $x=-m$ và có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $0$ | | $-m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m^2+1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Sử dụng phương pháp ghép bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $+\infty$ | | $m^2+1$ | | $+\infty$ |
| $f(u)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ thì $(4;+\infty)\subset(-m;+\infty)$ nên $-m\le 4 \Leftrightarrow m\ge -4$.

Vậy có $4$ giá trị nguyên âm của tham số $m$ thỏa mãn. **Chọn C**

**Dạng 2: Cực trị của hàm số hợp**

**Ví dụ 1.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

**Lời giải**

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)=-\left[(3-x)^2-1\right](3-x-4)=(x+1)(x^2-6x+8)$.

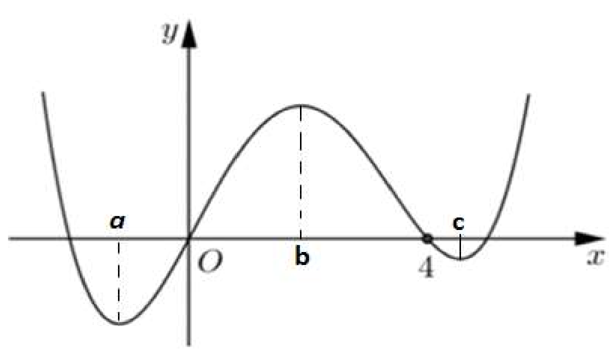
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-6x+8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại là $x=2$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

**Lời giải**

**Cách 1:** Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ta có $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2+6x\right).f'\left(x^3+3x^2\right)$

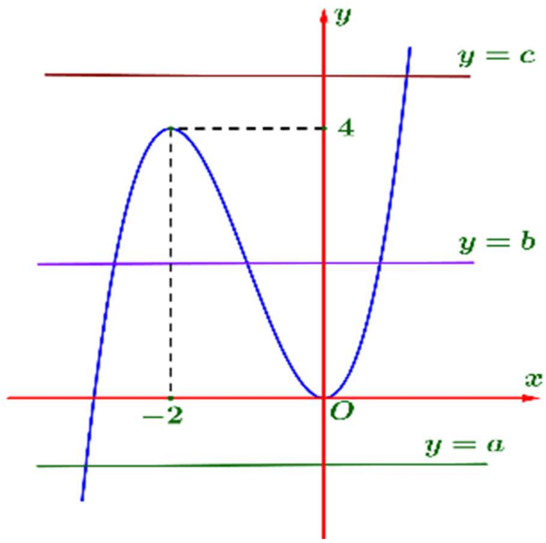
Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x^3+3x^2=a;\ a<0\\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4\\ x^3+3x^2=c;\ c>4\end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2\Rightarrow h'(x)=3x^2+6x$.

Cho $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(x^3 + 3x^2\right)$ có 7 cực trị.

**Cách 2: (Phương pháp ghép bảng biến thiên)**

Xét hàm số $u = x^3 + 3x^2$ ta có $u' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

| x | -∞ | | | -2 | | 0 | | | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u = x^3 + 3x^2$ | -∞ | a | b | 4 | b | 0 | b | 4 | c | +∞ |
| $f(u)$ | +∞ | | f(b) | | f(b) | | f(b) | | | +∞ |
| | | f(a) | | 0 | | 0 | -2 | 0 | f(c) | |

Gọi $a,b,c$ là các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ khi đó $a<0<b<4<c$

Và ta cũng có $f\left(a\right)<f\left(c\right)<0$; $f\left(b\right)>0$.

Suy ra $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)$ có 7 điểm cực trị.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(3-x\right)\left(x^2-1\right)+2x$, . $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^2-1$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

**A.** $x=-1$ . **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-2x=\left(3-x\right)\left(x^2-1\right)+2x-2x=\left(3-x\right)\left(x^2-1\right)$.

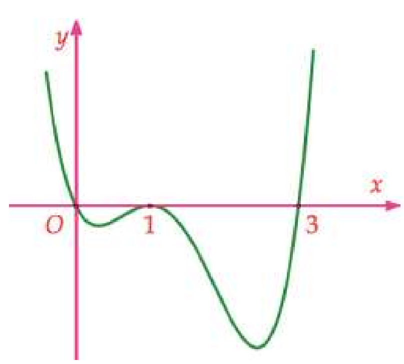
$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(3-x\right)\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=1$ .

**Ví dụ 4.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ




Đồ thị hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

**A.** 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

**C.** 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ đồ thị suy ra $f(x)=0$ có nghiệm đơn là $x=0; x=3$ và nghiệm kép $x=1$.

Và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn $x=x_1\in(0;1)$; $x=x_2\in(1;3)$ và $x=1$.

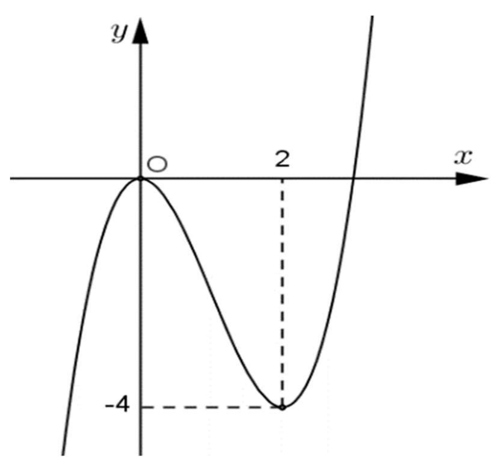
Ta có: $y=\left(f(x)\right)^2 \Rightarrow y'=2f'(x).f(x)$ có các nghiệm đơn là $x=0; x=3; x_1; x_2$ và nghiệm bội 3 là $x=1$.

Ta có bảng xét dấu sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $x_1$ | | $1$ | | $x_2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y'=2f'(x).f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | | CT | | CĐ | | CT | | CĐ | | CT | | |

Vậy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

**Ví dụ 5.** Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên.




Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 4 . **D.** 6.

## Lời giải

**Chọn C**

Xét hàm số $y = f\left[f(x)\right]$, $y' = f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left[f(x)\right] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in (2;+\infty) \\ x = b \in (a;+\infty) \end{array}\right..$$

Với $x \in (-\infty;0) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f'\left[f(x)\right] > 0 \Rightarrow y' > 0$.

Với $x \in (0;2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f'\left[f(x)\right] > 0 \Rightarrow y' < 0$ .

Với $x \in (2;a) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f'\left[f(x)\right] > 0 \Rightarrow y' > 0$.

Với $x \in (a;b) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 2 \end{cases} \Rightarrow f'\left[f(x)\right] < 0 \Rightarrow y' < 0$.

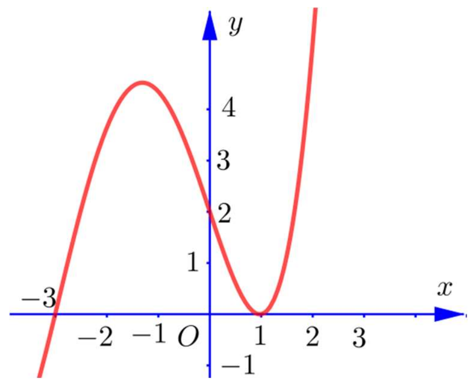
Với $x \in (b;+\infty) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 2 \end{cases} \Rightarrow f'\left[f(x)\right] > 0 \Rightarrow y' > 0$.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f\left[f(x)\right]$ có bốn điểm cực trị.

**Ví dụ 6**. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ




Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^3$ là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^3 \Rightarrow g'(x)=-6f'(1-2x)\left[f(1-2x)\right]^2$.

Do $\left[f(1-2x)\right]^2 \geq 0$ nên dấu $g'(x)$ chỉ phụ thuộc dấu của $-6f'(1-2x)$.

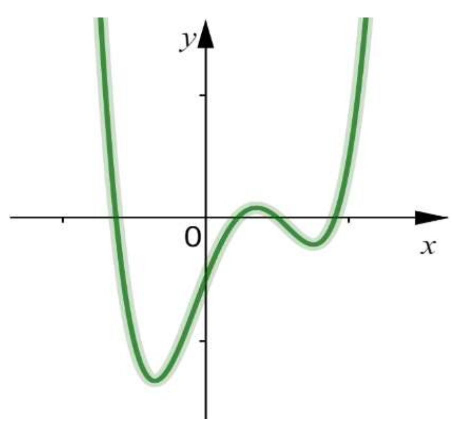
Dựa vào đồ thị ta có:

$f'(x)=a(x+3)(x-1)^2$, $a>0 \Rightarrow f'(1-2x)=a(4-2x)(-2x)^2$

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi qua $x=2$ nên $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ không có điểm cực đại.

**Ví dụ 7**. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f\left(|x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Lời giải**

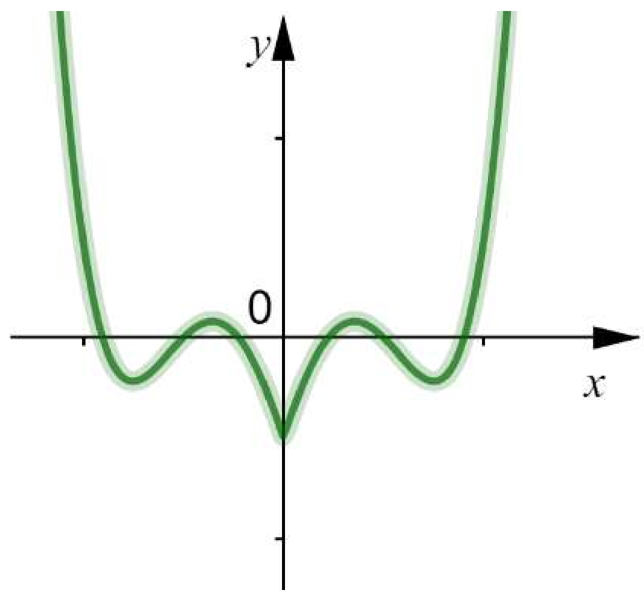
**Chọn C**

Đồ thị $\left(C'\right)$ của hàm số $y = f\left(|x|\right)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của $\left(C\right)$ nằm bên phải trục tung ta được $\left(C_1\right)$.

+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của $\left(C_1\right)$ ta được $\left(C_2\right)$.

+ Khi đó $\left(C'\right) = \left(C_1\right) \cup \left(C_2\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới




Từ đồ thị $\left(C'\right)$ta thấy hàm số $y = f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

**Ví dụ 8**. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | 2 | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $3$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đồ thị hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y=f\left(x\right)$ nằm trên $Ox$ (Kể cả giao điểm trên trục $Ox$)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua $Ox$ của đồ thị $y=f\left(x\right)$ nằm dưới $Ox$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left\|f\left(x\right)\right\|$ | $+\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $1$ | | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 3 cực trị.

**Ví dụ 9**. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | $5$ | | $-3$ | | $+\infty$ |

Hàm số $y=\left|f\left(1-3x\right)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **<u>D</u>.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $g\left(x\right)=f\left(1-3x\right)+1$. Suy ra $g'\left(x\right)=-3.f\left(1-3x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f(1-3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Suy ra bảng biến thiên:

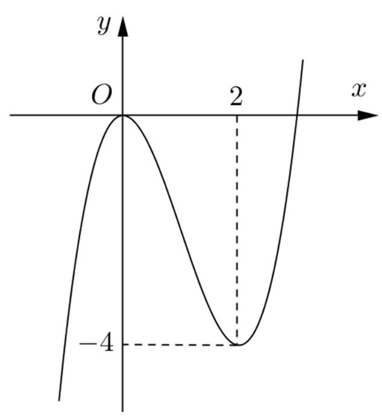
| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| $\lvert g(x)\rvert$ | $+\infty \searrow 0 \nearrow$ | | $3$ | $\searrow 0 \nearrow$ | $5$ | $\searrow 0 \nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

**Ví dụ 10**. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để đồ thị của hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ có 5 điểm cực trị?

**A.** $2$. **<u>B</u>.** $3$. **C.** $4$. **D.** $5$.

Vẽ được đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m$.



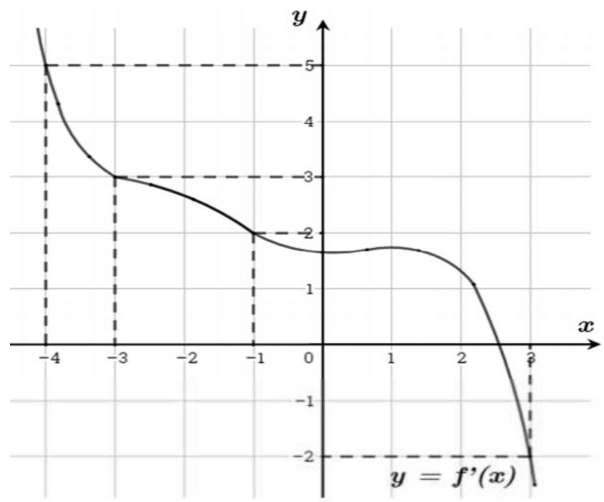

*Nhận xét:* Đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ nhận được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ lên trên $m$ đơn vị nếu $m>0$ hoặc tịnh tiến xuống dưới $-m$ đơn vị nếu $m<0$.

Do đó, hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Do đó: $0<m<4,(m\in\mathbb{Z})\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$, chọn B.

*2.1.3. Ứng dụng việc khảo sát tính chất của hàm số hợp để giải quyết một bài toán liên quan*

**Ví dụ 1:** Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.




Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào?

**A.** $x=-3$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$..

**Lời giải**

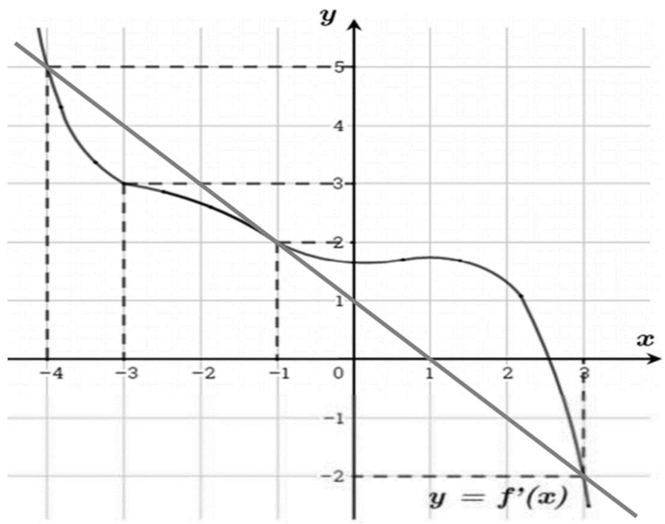
**Chọn C**

Xét hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ trên $[-4;3]$.

$g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1-x$.

Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y=1-x$.




Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Ta lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-4;3]$ như sau:

| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $g(-4)$ | $\searrow$ | $g(-1)$ | $\nearrow$ | $g(3)$ |

Vậy $\min\limits_{[-4;3]} g(x) = g(-1)$.

**Ví dụ 2**. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

**A.** $7$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $6$.

## Lời giải

**Cách 1:** Đặt $t=\sin x$, $x\in\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành $f(t)=1,\forall t\in[-1;1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-1;0)\\ t=b\in(0;1)\end{array}\right.$.

**Trường hợp 1**: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\sin x=t$ có $2$ nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn $\pi<x_1<x_2<2\pi$.

**Trường hợp 2**: $t=b\in(0;1)$.

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 3 nghiệm $x_1,x_2,x_3$ thỏa mãn $0<x_3<x_4<\pi;2\pi<x_5<\frac{5\pi}{2}$;

Nhận xét cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

**Cách 2 ( Phương pháp ghép bảng biến thiên)**

Đặt $t=\sin x$, $x\in\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành $f(t)=1,\forall t\in[-1;1]$

| x | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\frac{5\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u=\sin x$ | $0 \rightarrow$ | $1 \leftarrow$ | $0 \leftarrow$ | $-1 \leftarrow$ | $0 \rightarrow$ | $1$ |
| $f(u)$ | $0$ | $2$ | $0$ | $2$ | $0$ | $2$ |

Do đó tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 5.

**Ví dụ 3**. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $-3$ | | $+\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình

$6f(x^2-4x)=m$ có ít nhất $3$ nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $25$. **<u>B</u>.** $30$. **C.** $29$. **D.** $34$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $u=x^2-4x \Rightarrow u'=2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

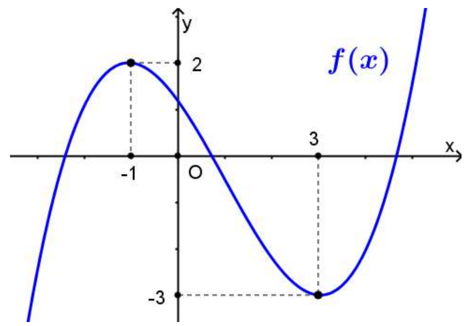
Sử dụng phương pháp ghép bảng biến:

| $x$ | $0$ | | $2$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $0$ | $-2$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f(u)$ | $-3$ | $2$ | $-2$ | $2$ | $-3$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên, hàm số có ít nhất $3$ nghiệm phân biệt khi

$-3 < \dfrac{m}{6} \le 2 \Leftrightarrow -18 < m \le 12$.

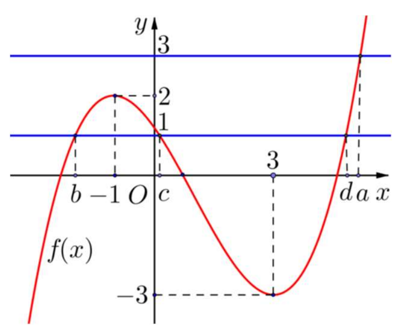
**Ví dụ 4**. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị được cho như ở hình vẽ bên dưới. Hỏi phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x + 1\right) - 2\right| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?




**A.** 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** $11$.

**Lời giải**

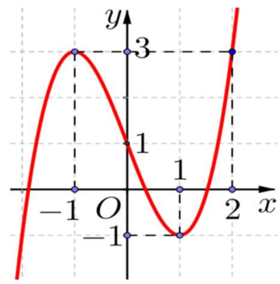
**Cách 1:**




- Dựa vào đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, ta có:

$$\left|f\left(x^3 - 3x + 1\right) - 2\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^3 - 3x + 1\right) = 1 \\ f\left(x^3 - 3x + 1\right) = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x + 1 = b\ \left(b < -1\right)\ (2) \\ x^3 - 3x + 1 = c\ \left(-1 < c < 3\right)\ (3) \\ x^3 - 3x + 1 = d\ \left(d > 3\right)\ (4) \end{array}\right. \\ x^3 - 3x + 1 = a\ \left(a > d\right)\ (1) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (hình vẽ dưới đây)




Ta suy ra: Phương trình (1), (2), (4) mỗi phương trình có 1 nghiệm, phương trình (3) có 3 nghiệm và các nghiệm này đều phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

**Cách 2: (Phương pháp ghép bảng biến thiên)**

Đặt $u = x^3 - 3x + 1$

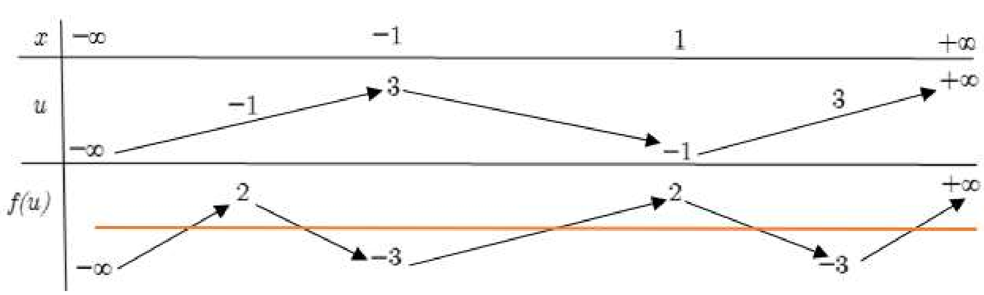
Ta có $u'(x) = 3x^2 - 3$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x + 1\right) - 2\right| = 1$ trở thành: $\left|f(u) - 2\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(u) = 3 \\ f(u) = 1 \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u(x) = x^3 - 3x + 1$ ta có bảng sau biến thiên của hàm hợp $f\left(x^3 - 3x + 1\right) = f(u)$ như sau:



Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u)=1$ có $5$ nghiệm và phương trình $f(u)=3$ có $1$ nghiệm. Vậy phương trình đã cho có $6$ nghiệm.

**Ví dụ 5**. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** 3. **D.** 8.

**Lời giải**

**Cách 1:**

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t)+3=0 \Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=-\dfrac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t=a\in(-1;0)$ và $t=b\in(0;1)$.

**Trường hợp 1:** $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $x_1,x_2,x_3,x_4$ thỏa: $-\pi<x_1<x_2<0<\pi<x_3<x_4<2\pi$.

**Trường hợp 2:** $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 2 nghiệm $x_5,x_6$ thỏa $0<x_5<x_6<\pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$

**Cách 2: (Phương pháp ghép bảng biến thiên)**

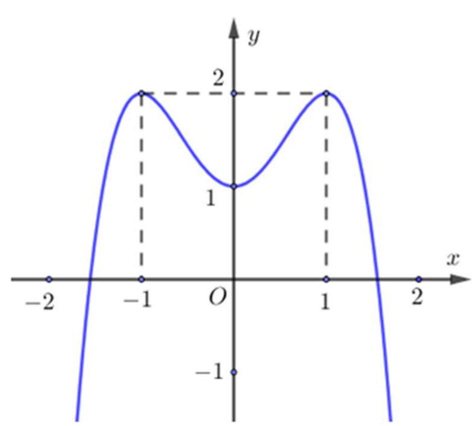
Đặt $t=\sin x\in[-1;1]$ vì $x\in[-\pi;2\pi]$; $t'=0\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{3\pi}{2}\end{array}\right.$;

| x | $-\pi$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | $\dfrac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u=\sin x$ | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $f(u)$ | -1 ↘ | -2 ↗ | -1 ↘ | -2 ↗ | -1 ↘ | -2 ↗ | -1 |

Ta có $2f(\sin x)+3=0\Leftrightarrow f(\sin x)=-\dfrac{3}{2}$.

Do đó tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 6.

**Ví dụ 6**. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:




Đặt $g(x)=f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

**A.** $10$. **B.** $11$. **C.** $9$. **D.** $8$.

## Lời giải

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f'\left[f(x)\right]=0 & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

TH1: Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

TH2: Phương trình $f'\left[f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=0 & (*) \\ f(x)=1 & (**) \\ f(x)=-1 & (***) \end{array}\right.$

Nhận xét:

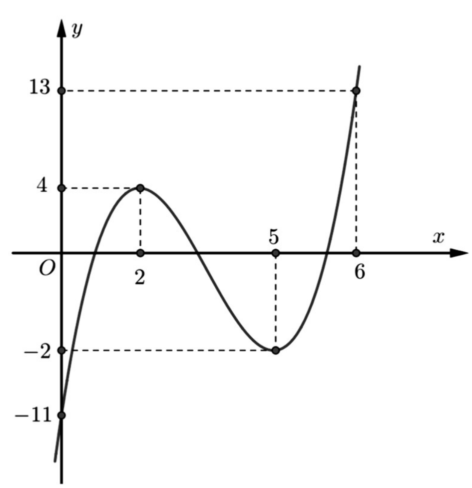
- Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=0$. Suy ra phương trình $(*)$ có $2$ nghiệm.

- Số nghiệm của phương trình $(**)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1$. Suy ra phương trình $(*)$ có $3$ nghiệm .

- Số nghiệm của phương trình $(***)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$. Suy ra phương trình $(*)$ có $2$ nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là $9$.

**Ví dụ 7**. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình

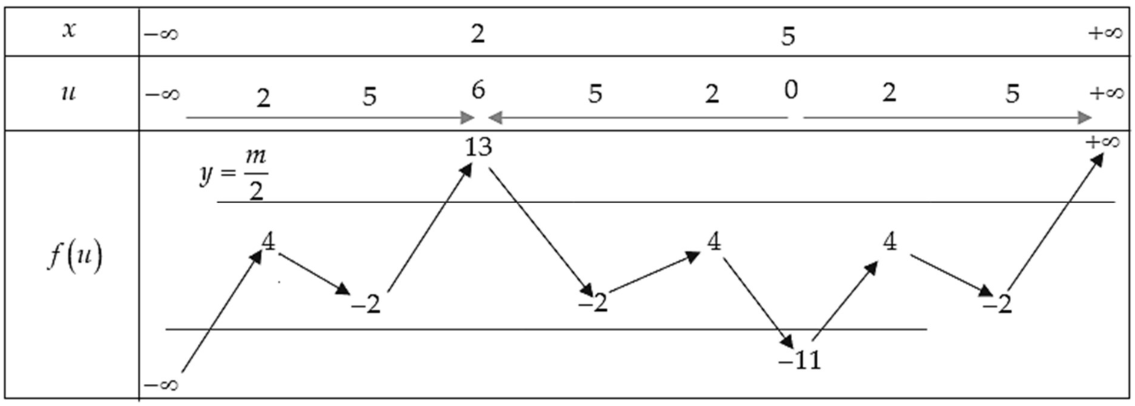
$f\left(f\left(x\right)+2\right)=\dfrac{m}{2}$ có $3$ nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** $11$. **B.** $32$. **C.** $9$. **D.** $34$.

**Lời giải**

Đặt $u=f\left(x\right)+2$. Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x=2$ và $x=5$.

Sử dụng phương pháp ghép bảng biến thiên:

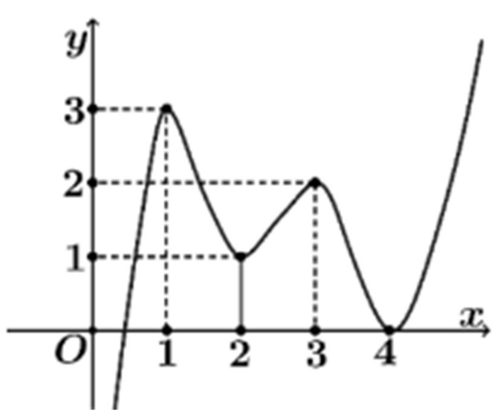



Từ bảng biến thiên, phương trình có $3$ nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-11<\dfrac{m}{2}<-2\\4<\dfrac{m}{2}<13\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8<m<26\\-22<m<-4\end{array}\right.$$

Vậy có $34$ giá trị của $m$ thỏa mãn.

**Ví dụ 8**. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m$ để phương trình $2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2=m$ có số nghiệm nhiều nhất ?

**A.** $11$. **B.** $12$. **C.** $13$. **D.** $14$.

**Lời giải**

Đặt $u=f(x)$ thì phương trình trở thành $2u^3-9u^2=m$.

Xét hàm số $g(u)=2u^3-9u^2 \Rightarrow g'(u)=6u^2-18u=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=3 \end{array}\right.$

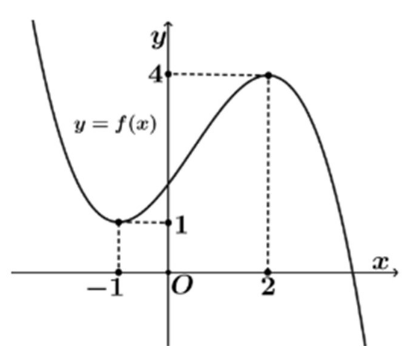
Sử dụng phương pháp ghép bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $3$ | $1$ | $2$ | $0$ | $3$ | $+\infty$ |
| $g(u(x))$ | $-\infty$ | $0$ | $-27$ | $-7$ | $-20$ | $0$ | $-27$ | $+\infty$ |

$y=m$

Phương trình có nhiều nghiệm nhất khi và chỉ khi $-20<m<-7$ nên có $12$ số nguyên $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 9.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\left|3f^2(2x)-12f(2x)-m\right|=1$ có ít nhất $7$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty;1)$ ?

**A.** $3$. **B.** $4$. **<u>C.</u>** $1$. **D.** $2$.

## Lời giải

Ta có:

$$\left|3f^2(2x)-12f(2x)-m\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3f^2(2x)-12f(2x)-m=1 \\ 3f^2(2x)-12f(2x)-m=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3f^2(2x)-12f(2x)-1=m \\ 3f^2(2x)-12f(2x)+1=m \end{array}\right.$$

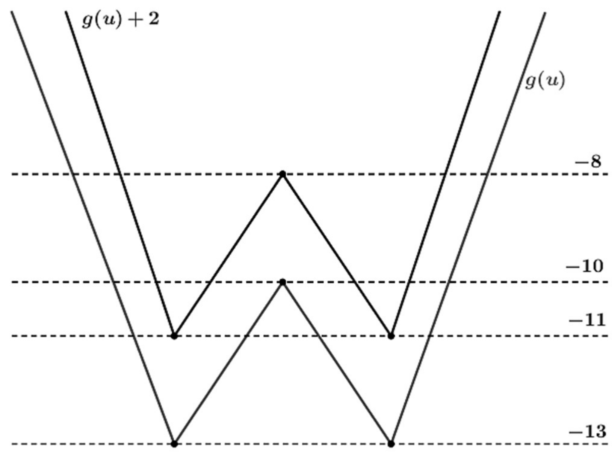
Đặt $u=f(2x)$, xét hàm số $g(u)=3u^2-12u-1 \Rightarrow g'(u)=6u-12=0 \Leftrightarrow u=2$

.

Sử dụng phương pháp ghép bảng biến thiên:

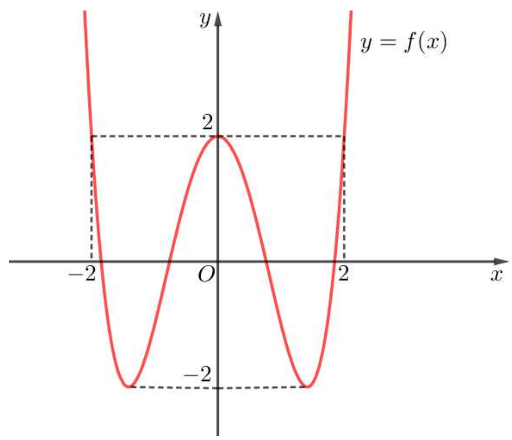
| $x$ | $-\infty$ | | | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ |
| $u(x)$ | $+\infty$ | $2$ | $1$ | $2$ | $4$ |
| $g(u(x))$ | $+\infty$ | $-13$ | $-10$ | $-13$ | $-1$ |

Ta cần tìm $m$ để hệ $\left[\begin{array}{l} g(u)=m \\ g(u)+2=m \end{array}\right.$ có ít nhất $7$ nghiệm phân biệt. Ta phác họa đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ như sau:




Để hệ có ít nhất $7$ nghiệm phân biệt thì $-11 < m \le -10$ nên $m \in \{-10\}$.

**Ví dụ 10.** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.




Số nghiệm thực của phương trình $\left(f\left(f(x)\right)\right)' = 0$ là

**A.** $4$. **<u>B</u>.** $15$. **C.** $12$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Ta có $\left(f\left(f(x)\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow f'(x).f'\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = a \in (-2;0) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = b \in (0;2) \end{array}\right.$

Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm vì hàm số có 3 cực trị.

Phương trình $f(x)=a\in(-2;0)$ có 4 nghiệm phân biệt vì đường thẳng $y=a\in(-2;0)$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm phân biệt.

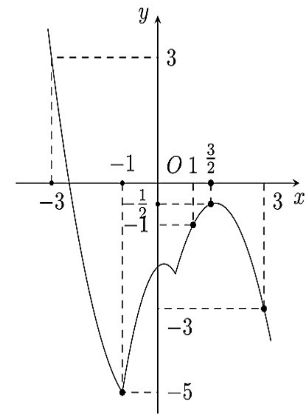
Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt vì đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Phương trình $f(x)=b\in(0;2)$ có 4 nghiệm phân biệt vì đường thẳng $y=b\in(0;2)$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $\left(f\left(f(x)\right)\right)'=0$ có 15 nghiệm thực phân biệt.

*2.1.4. Trích dẫn các đề thi*

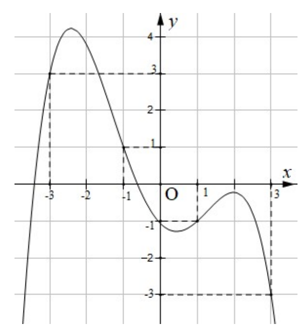
**Câu 1. (Đề thi HSG lớp 12-Tỉnh Quảng Ngãi năm học 2019-2020)**



Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các điểm cực trị của hàm số

$g(x) = \frac{1}{2} f\left(2x-1\right) + x^2 - x + 2019$.

**Câu 2. (Đề dự bị thi HSG lớp 12-Tỉnh Quảng Ngãi năm học 2020-2021)**



Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ.

Xác định $m$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(m-x\right) + \frac{x^2}{2} - mx$ nghịch biến trên khoảng $\left(3;4\right)$.

**Câu 3. (Đề thi HSG lớp 12-Tỉnh Quảng Ngãi năm học 2021-2022)**

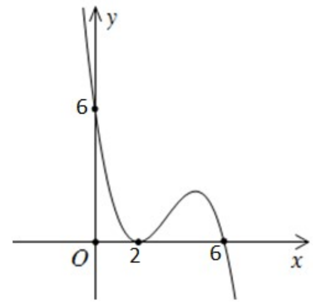
Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hỏi phương trình $f\left(f\left(\sin x\right)\right) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$?

**Câu 4**. **(Đề thi HSG lớp 12-Tỉnh Quảng Ngãi năm học 2022-2023)**

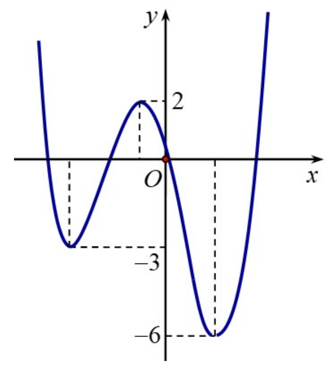
Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(2-x)$ là đường cong ở hình vẽ bên. Tìm các điểm cực trị của hàm số $h(x) = 2f(x^2) - \frac{5}{7}x^7$.




**Câu 5. (Đề thi HSG lớp 12-Tỉnh Quảng Ngãi năm học 2023-2024)**

Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.

Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $h\left(x\right) = \left|f^4\left(x\right) - 4f\left(x\right) + m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị.




**Câu 6.(Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2016-2017)**

*Cho hàm số* $y = f\left(x\right)$ *có bảng biến thiên như sau*

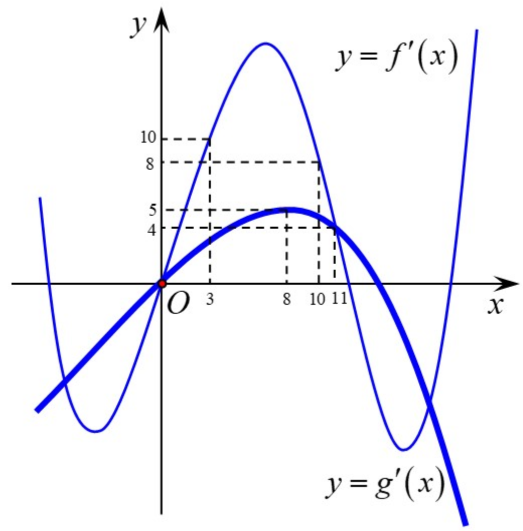
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đồ thị của hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $5$.　　**B.** $3$.　　**C.** $4$.　　**D.** $2$.

**Câu 7. (Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2017-2018)**

Cho hai hàm số $y = f\left(x\right), y = g\left(x\right)$. Hai hàm số $y = f'\left(x\right)$ và $y = g'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = g'\left(x\right)$.




Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(5;\frac{31}{5}\right)$. **<u>B.</u>** $\left(\frac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$.

**Câu 8. (Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**<u>A</u>.** $(-2;1)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Câu 9. (Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

**A.** 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

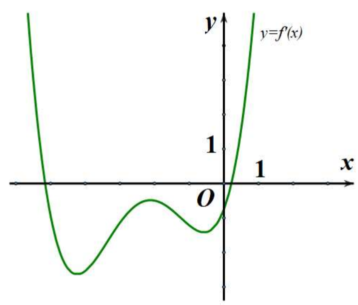
**Câu 10. (Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2019-2020)** Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

**A.** $11$. **B.** 9. **C.** $7$. **D.** 5.

**Câu 11. (Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2019-2020-Đợt 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên.

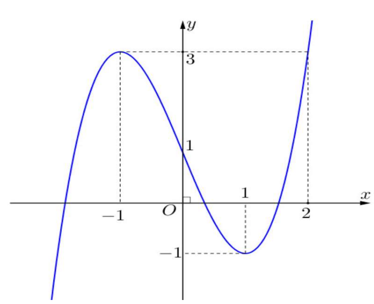



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

**Câu 12. (Đề thi THPT-Mã đề 101 –Năm học 2020-2021)**

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ là

**A.** $9$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $7$.

**Câu 13. (Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2021-2022)**

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

**A.** $5$. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 11.

**Câu 14. (Đề minh họa của BGD– Năm học 2022-2023)**

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in\left(-10;+\infty\right)$ để hàm số $y=\left|x^3+(a+2)x+9-a^2\right|$ để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$?

**A.** 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

**Câu 15. (Đề thi THPT-Mã đề 101 – Năm học 2022-2023)**

Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-32x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho ứng với mỗi $m$, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-3;2\right)$ của phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m$ bằng $-4$?

**A.** $145$. **B.** $142$. **C.** $144$. **D.** $143$.

**Câu 16. (Đề minh họa thi THPT năm 2023-2024).** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-3x-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho ứng với mỗi $m$, hàm số $g(x)=f(-x^3+3x^2+m)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1;4)$?

**A.** 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

..........................................................................................................................